

1 Das Problem, welches zum Logarithmus führt

Gegeben sei die folgende Gleichung:

$$a = x^n$$

Um nun die Basis (hier x) auszurechnen, muss man die n-te Wurzel aus a ziehen:

$$\begin{aligned} a &= x^n & | \sqrt[n]{} \\ \sqrt[n]{a} &= x \end{aligned}$$

Soweit sollte das mathematische Problem lösbar sein. Was aber ist zu tun, wenn man in der Gleichung

$$a = b^x$$

den Wert des Exponenten (hier x) zur Basis b bestimmen möchte, so dass die Gleichung richtig ist?

Der einfachste Weg ist natürlich der, verschiedene Werte für den Exponenten x einzusetzen und den zugehörigen Wert von b^x zu berechnen und mit a zu vergleichen. Das ist zum Einen mühsam, zum Anderen kann über diesen Weg eine Annäherung ziemlich lange dauern. Es gibt aber einen anderen Weg: Die Verwendung des Logarithmus. Zunächst soll der Logarithmus definiert werden.

2 Definition des Logarithmus

Der Logarithmus von a zur Basis b mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $a > 0$ ist diejenige Zahl, mit der man die Basis b potenzieren muss, um a zu erhalten. Man schreibt also für

$$(1) \quad \boxed{a = b^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_b(a)}.$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig. Man sagt: „Der Logarithmus bringt den Exponenten herunter.“

Beispiele zur Schreibweise:

$$\begin{array}{llll} 27 = 3^x & \Rightarrow & x = \log_3(27) & \text{mit } x = 3 \\ \frac{1}{4} = 2^x & \Rightarrow & x = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) & \text{mit } x = -2 \\ 10000 = 10^t & \Rightarrow & t = \log_{10}(10000) & \text{mit } t = 4 \end{array}$$

3 Besondere Logarithmen

Ein paar Logarithmen werden in der Wissenschaft bzw. in der Wirtschaft besonders häufig gebraucht, so dass sie besondere Namen und Symbole zugewiesen bekommen haben.

1. Der dekadische Logarithmus ist der Logarithmus zur Basis 10. Er wird typischerweise als lg oder als log ohne Angabe der Basis geschrieben:

$$\log_{10}(a) = \log(a) = \lg(a).$$

2. Der Logarithmus naturalis zur Basis e (der Euler'schen Zahl) findet Verwendung bei der Behandlung von Exponentialfunktionen

$$\log_e(a) = \ln(a).$$

3. Der binäre Logarithmus zur Basis 2 wird in der Informatik benutzt

$$\log_2(a) = \text{lb}(a).$$

4 Wo wird der Logarithmus angewendet?

Anwendungen des Logarithmus finden sich vielfach in der Wissenschaft, wenn der Wertebereich viele Größenordnungen umfasst. Daten werden entweder mit einer logarithmischen Skala dargestellt, oder es werden logarithmisch definierte Größen verwendet, wie zum Beispiel beim pH-Wert oder bei der Empfindlichkeit der Sinnesorgane. Hier ein paar Beispiele für logarithmisch definierte Größen:

- Der Schalldruckpegel (gemeinhin als Lautstärke bezeichnet) wird in Dezibel gemessen.
- Das Helligkeitsempfinden des menschlichen Auges.
- Die Messungen des pH-Werts von Säuren und Laugen.
- Die Richterskala zur Beschreibung von Erdbeben.
- Die Sternhelligkeit, angegeben in Magnetuden.

Ferner finden Logarithmen Anwendung bei allen technischen oder natürlichen Vorgängen, welche durch eine Exponentialfunktion modelliert werden können. Als Beispiele mögen hier die folgenden Vorgänge dienen:

- Radioaktive Zerfälle.
- Lade- und Entladevorgang eines Kondensators.
- Zeitliches Verhalten von Bakterienkolonien.

5 Folgerungen aus der Definition des Logarithmus

Wenn man die Gleichung

$$a = b^x$$

mit $b > 0$, $b \neq 1$ und $a > 0$ hat, und aus der Definition (Gleichung 1) folgt

$$x = \log_b(a),$$

dann kann man, wenn man x in $a = b^x$ mit $x = \log_b(a)$ ersetzt, auch schreiben:

$$(2) \quad \boxed{a = b^{\log_b(a)}}.$$

Andererseits kann man in der Definitionsgleichung für den Logarithmus (Gleichung 1)

$$x = \log_b(a)$$

auch a mit b^x ersetzen und bekommt

$$(3) \quad \boxed{x = \log_b(b^x)}.$$

Insbesondere erkennt man für den Fall, dass $x = 1$ ist, dass aus der Gleichung 3 unmittelbar folgt:

$$(4) \quad \boxed{1 = \log_b(b)}.$$

Diese Folgerungen sind wichtig und werden immer wieder für Rechnungen mit den Logarithmen benutzt.

6 Der Basiswechsel

Die meisten Schul-Taschenrechner können den Logarithmus naturalis (\ln) und / oder dekadischen Logarithmus (\lg) berechnen. Um einen Logarithmus für eine beliebige Basis ausrechnen zu können, muss man einen Basiswechsel vollziehen. Das ist nicht weiter schwierig und soll zunächst an einem Beispiel vorgerechnet werden.

Gegeben sei die Gleichung

$$2^t = 128.$$

Durch Ausprobieren findet man schnell heraus, dass $t = 7$ sein muss. Nun ist das Ergebnis aber mit dem dekadischen Logarithmus zu bestimmen.

Die Basis der linken Seite Gleichung

$$2^t = 128$$

ist 2. Diese lässt sich nach der Gleichung 2 auch schreiben als $2 = 10^{\lg(2)}$. Entsprechend kann man die rechte Seite auch schreiben als $128 = 10^{\lg(128)}$. Man erhält also

$$\left(10^{\lg(2)}\right)^t = 10^{\lg(128)}.$$

Nun gilt auch das Potenzgesetz, dass wenn man eine Potenz potenziert, dass dann die Exponenten miteinander multipliziert werden müssen

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Somit vereinfacht sich die linke Seite der Gleichung:

$$\left(10^{\lg(2)}\right)^t = 10^{t \cdot \lg(2)}.$$

Nun werden beide Seiten mit dem dekadischen Logarithmus logarithmiert, um die beiden Exponenten herunter zu bringen. Der dekadische Logarithmus ist deshalb sinnvoll, weil sich nach der Gleichung 3 der Ausdruck stark vereinfacht:

$$\lg(10^{t \cdot \lg(2)}) = t \cdot \lg(2) \quad \text{und} \quad \lg(10^{\lg(128)}) = \lg(128).$$

Nun muss man nur noch durch $\lg(2)$ teilen und bekommt den Exponenten heraus.

Die ganze Rechnung sieht nun so aus:

$$\begin{array}{rcl} 2^t & = & 128 \\ \left(10^{\lg(2)}\right)^t & = & 10^{\lg(128)} \\ 10^{t \cdot \lg(2)} & = & 10^{\lg(128)} \\ \lg(10^{t \cdot \lg(2)}) & = & \lg(10^{\lg(128)}) \\ t \cdot \lg(2) & = & \lg(128) \\ t & = & \frac{\lg(128)}{\lg(2)}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit } a = b^{\log_b(a)} \text{ und der Basis } b = 10 \\ \text{Potenzgesetz: } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ \text{nun werden beide Seiten mit } \lg \text{ logarithmiert} \\ \text{mit } x = \log_b(b^x) \text{ mit } b = 10 \text{ und } x = t \cdot \lg(2) \text{ folgt} \\ \text{geteilt durch } \lg(2) \text{ liefert dann den Exponenten} \end{array}$$

Wenn man dieses Ergebnis in den Taschenrechner eingibt, bekommt man, wie erwartet, für $t = 7$ heraus.

Diese eben durchgeführte Rechnung lässt sich verallgemeinern:

$$\begin{array}{rcl} B^t & = & A \\ \left(10^{\lg(B)}\right)^t & = & 10^{\lg(A)} \\ 10^{t \cdot \lg(B)} & = & 10^{\lg(A)} \\ \lg(10^{t \cdot \lg(B)}) & = & \lg(10^{\lg(A)}) \\ t \cdot \lg(B) & = & \lg(A) \\ t & = & \frac{\lg(A)}{\lg(B)}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{mit } a = b^{\log_b(a)} \text{ und der Basis } b = 10 \\ \text{Potenzgesetz: } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ \text{nun werden beide Seiten mit } \lg \text{ logarithmiert} \\ \text{mit } x = \log_b(b^x) \text{ mit } b = 10 \text{ und } x = t \cdot \lg(B) \text{ folgt} \\ \text{geteilt durch } \lg(B) \text{ liefert dann den Exponenten} \end{array}$$

Dieses nennt man Basiswechsel. Es gilt zusammengefasst für $a = b^x$

$$(5) \quad \boxed{a = b^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_b(a) = \frac{\lg(a)}{\lg(b)} = \frac{\ln(a)}{\ln(b)} = \dots}$$

Beispiele:

$$2^t = 512 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\lg(512)}{\lg(2)} = 9$$

$$3^t = 243 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\lg(243)}{\lg(3)} = 5$$

$$1296^t = 6 \quad \rightarrow \quad t = \frac{\lg(6)}{\lg(1296)} = 0.25$$

$$4^x = 2048 \quad \rightarrow \quad x = \frac{\lg(2048)}{\lg(4)} = 5.5$$

7 Die Rechenregeln

Nun geht es um die Rechenregel für Logarithmen. Generell muss das Argument des Logarithmus zur Basis b nach der Voraussetzung in der Definition immer größer Null sein.

7.1 Potenzen

Es gilt

$$(6) \quad \boxed{\log_b(a^r) = r \cdot \log_b(a)}.$$

Zum Beweis braucht man wieder die Folgerungen aus der Definition (Gleichung 2 und Gleichung 3), sowie das Potenzgesetz $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

a^r	mit $a = b^{\log_b(a)}$	Nach Gleichung 2.
$a^r = (b^{\log_b(a)})^r$		Mit dem Potenzgesetz: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
$a^r = b^{r \cdot \log_b(a)}$		Nun werden beide Seiten mit $\log_b(\cdot)$ logarithmiert.
$\log_b(a^r) = \log_b(b^{r \cdot \log_b(a)})$		Nun gilt nach Gleichung 3: $x = \log_b(b^x)$ mit $x = r \cdot \log_b(a)$.
$\log_b(a^r) = r \cdot \log_b(a)$		Damit ist das Gesetz bewiesen.

7.2 Die Wurzel

Es gilt

$$(7) \quad \boxed{\log_b(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(a)}.$$

Der Beweis ist nun eine direkte Folge aus der Rechenregel für Logarithmen von Potenzen (Gleichung 6). Man kann allgemein die Wurzel als Potenz schreiben:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}.$$

Wenn man nun $r = \frac{1}{n}$ setzt, und die Rechenregel für die Logarithmen von Potenzen anwendet, sieht man

$$\log_b(\sqrt[n]{a}) = \log_b(a^{\frac{1}{n}}) = \log_b(a^r) = r \cdot \log_b(a) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(a).$$

7.3 Die Produkte

$$(8) \quad \boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)}.$$

Zum Beweis braucht man wieder die Folgerungen aus der Definition (Gleichung 2 und Gleichung 3), sowie das Potenzgesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$\begin{aligned} x \cdot y &= b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)} && \text{Nach Gleichung 2.} \\ x \cdot y &= b^{\log_b(x) + \log_b(y)} && \text{Mit dem Potenzgesetz: } a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \\ \log_b(x \cdot y) &= \log_b(b^{\log_b(x) + \log_b(y)}) && \text{Nun wurden beide Seiten mit } \log_b() \text{ logarithmiert.} \\ \log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y) && \text{Nach Gl. 3 gilt } k = \log_b(b^k) \text{ mit } k = \log_b(x) + \log_b(y). \end{aligned}$$

Damit ist auch dieses Gesetz bewiesen.

7.4 Die Quotienten

$$(9) \quad \boxed{\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)}.$$

Zum Beweis braucht man wieder die Folgerungen aus der Definition (Gleichung 2 und Gleichung 3), sowie das Potenzgesetz $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$.

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{b^{\log_b(x)}}{b^{\log_b(y)}} && \text{Nach Gleichung 2.} \\ \frac{x}{y} &= b^{\log_b(x) - \log_b(y)} && \text{Mit dem Potenzgesetz: } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}. \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(b^{\log_b(x) - \log_b(y)}) && \text{Nun wurden beide Seiten mit } \log_b() \text{ logarithmiert.} \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) && \text{Nach Gl. 3 gilt } k = \log_b(b^k) \text{ mit } k = \log_b(x) - \log_b(y). \end{aligned}$$

Damit ist auch dieses Gesetz bewiesen.

7.5 Die Summen und Differenzen

Aus der Rechenregel für Produkte (Gleichung 8) kann man schnell die Rechenregel für Summen und Differenzen ableiten. Es sei

$$x \pm y = x \left(1 \pm \frac{y}{x}\right).$$

Damit ist

$$(10) \quad \boxed{\log_b(x \pm y) = \log_b(x) + \log_b\left(1 \pm \frac{y}{x}\right)},$$

wobei $x > 0$ und $1 \pm y/x > 0$ sein muss.

8 Eine Anwendungsaufgabe

Angenommen, man legt 1500€ fest bei einem Jahreszinssatz von 2.8% an, nach wieviel Jahren hat man 800€ Gewinn gemacht?

Es handelt sich um ein exponentielles Wachstum mit gegebener prozentualer Wachstumsrate $p = 2.8$ und einem Anfangsbestand von $a = 1500$. Entsprechend lautet die Modellierungsfunktion f :

$$f(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 1500 \cdot \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^t.$$

Nun soll t für $f(t) = 1500 + 800 = 2300$ berechnet werden.

$$2300 = 1500 \cdot \left(1 + \frac{2.8}{100}\right)^t \quad | : 1500$$

$$\frac{23}{15} = \left(\frac{257}{250}\right)^t \quad | \log_{\frac{257}{250}}()$$

$$\log_{\frac{257}{250}}\left(\frac{23}{15}\right) = t \quad | \text{Basiswechsel dekadischer Logarithmus}$$

$$\frac{\lg\left(\frac{23}{15}\right)}{\lg\left(\frac{257}{250}\right)} = t$$

$$t \approx 15.479 \quad \text{Jahre}$$

Nach etwa 15,5 Jahren hat man einen Gewinn von 800 € erzielt.