Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung der Funktion

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\ .$$

Tipp: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a\cdot b}{a\cdot b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{a+b}{a\cdot b}$

Lösung:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

Differentialquotient:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h+1)\cdot(x+1)}{(x+h+1)\cdot(x+1)}\left(\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h(x+h+1)\cdot(x+1)}\cdot((x+1)-(x+h+1))\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h(x+h+1)\cdot(x+1)}\cdot(-h)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h+1)\cdot(x+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+2\mathrm{x}+hx+h+1}\\
&= \frac{-1}{x^2+2\mathrm{x}+1}\\
&= \frac{-1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$