

Bestimme mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Tipp: Verwenden Sie die dritte binomische Formel $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Differentialquotient:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{h}}{x+h-x} && \text{Trickreiche Erweiterung} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{h}}{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{h}}{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} && \text{Dritte binomische Formel} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \end{aligned}$$