Versuch Würfelzerfälle

Material: Viele Würfel mit identischer Seitenanzahl (mindestens 50 pro Gruppe). Boxen zum Hineinwürfeln.

Zeitaufwand: etwa 45 Minuten für den Versuch

Durchführung:

1. Die Gruppe wählt sich eine Zahl, die der Würfel zeigen kann. Wenn ein Würfel diese Zahl nach einem Wurf zeigt, gilt er als zerfallen.
2. Alle nicht zerfallenen Würfel werden gewürfelt. Bei ersten Wurf sind das natürlich alle Würfel.
3. Nachdem die Würfel gewürfelt wurden, werden alle zerfallenen Würfel aussortiert und ihre Anzahl zusammen mit der Nummer des Wurfs notiert. (Beispiel: 1. Wurf: 7 Zerfälle)
4. Nun wird wieder mit Punkt 2 weiter gemacht, bis man am Ende 12 Würfe durchgeführt hat.
5. Nun werden alle aussortierten Würfel wieder zusammengelegt und der Versuch wird 5 mal wiederholt.

Ergebnisse:

Wurf	Anzahl Zerfälle	Anzahl Zerfälle	Anzahl Zerfälle	Anzahl Zerfälle	Anzahl Zerfälle	Median
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						

Bilde den Median für jeden Wurf und stelle den Median in Abhängigkeit des Wurfes da!

Auswertung:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Würfel „zerfällt“?
2. Bestimme, wie viele Würfel für jeden Wurf theoretisch zerfallen müssten und trage die Werte in den Graphen ein.
3. Vergleiche den gemessenen Verlauf mit dem theoretischen Verlauf. Warum gibt es Abweichungen?
4. Nach welchem Wurf sind etwa die Hälfte (ein Viertel) der Würfel übrig? Gibt es einen Zusammenhang?

---

5. Zeige, dass die Exponentialfunktion $A_n = A_0 \cdot (1 - Z_w)^n$ den theoretischen Verlauf beschreibt. (A_n : Anzahl der nicht zerfallenen Würfel. A_0 : Anfangsanzahl, Z_w : Zerfallswahrscheinlichkeit, n : Wurfnummer).
6. Bestimme den Wert des Exponenten, nach der die Hälfte der Würfel zerfallen sind. („Halbwertszeit t_h !)
7. Zeige und begründe, dass der theoretische Verlauf sich auch durch $A_n = A_0 \cdot 0{,}5^{n/t_h}$ beschreiben läßt.

Bemerkungen:

Zusammenhang mit der Kenphysik:

Die einzelnen radioaktiven Kerne haben, ganz analog zu den Würfeln, eine konstante Zerfallswahrscheinlichkeit bezogen auf ein Zeitintervall. Entsprechend zerfallen innerhalb eines festen Zeitintervalls die radioaktiven Kerne genauso wie die Würfel bei jedem Wurf.

Eine Exponentialfunktion zur Berechnung der übrig gebliebenen Anzahl der Würfel:

Im Grunde ist die Überlegung, wie man auf eine Exponentialfunktion kommt ganz einfach:

Die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen Würfel ist konstant und gleich Eins durch die Anzahl der Seiten (S):

$$Z_w = 1/S .$$

Nach dem ersten Wurf müssten $A_0 \cdot Z_w$ Würfel zerfallen und $A_1 = A_0 - A_0 \cdot Z_w = A_0 \cdot (1 - Z_w)$ Würfel übrig bleiben.

Beispiel:

Für einen sechsseitigen Würfel beträgt die Zerfallswahrscheinlichkeit $Z_w = 1/6$ *. Wenn man 300 Würfel (* A_0 *) wirft, müsste jeder sechste die entsprechend gedachte Zerfallszahl zeigen. Dementsprechend müssten also* $300/6 = 50$ *Würfel zerfallen. Übrig bleiben nun* $A_1 = 300 - 300/6 = 300 \cdot (1 - 1/6) = 250$ *Würfel.*

Für den nächsten Wurf hat man nur noch eine Anfangsanzahl von A_1 . Entsprechend bleiben nach dem zweiten Wurf $A_2 = A_1 \cdot (1 - Z_w)$ Würfel übrig. Nach dem dritten Wurf sind entsprechend noch $A_3 = A_2 \cdot (1 - Z_w)$ Würfel übrig, usw.

Beispiel: (Es können nur ganze Würfel zerfallen bzw. übrig bleiben.)

Wurf	*Zerfallene Würfel:*	*Nicht zerfallene Würfel*		*Bezeichnung*
0	*0*	*300*	=	A_0
1	*50*	*250*	=	A_1
2	*42*	*208*	=	A_2
3	*35*	*173*	=	A_3

Wenn man nun die vorhandene Menge für jeden Wurf auf die Anfangsanzahl zurückführt

$$A_3 = A_2 \cdot (1 - Z_w) = \overbrace{A_1 \cdot (1 - Z_w)}^{A_2} \cdot (1 - Z_w) = A_1 \cdot (1 - Z_w)^2 = \overbrace{A_0 \cdot (1 - Z_w)}^{A_1} \cdot (1 - Z_w)^2 = A_0 \cdot (1 - Z_w)^3 ,$$

erkennt man schon, wie sich die Anzahl der übrig gebliebenen Würfel für eine beliebige Wurfnummer n bestimmt:

$$\boxed{A_n = A_0 \cdot (1 - Z_w)^n} .$$

Dieses nennt man auch eine Exponentialfunktion.

Die Halbwertszeit:

Eine andere Überlegung betrifft die „Halbwertszeit" t_h.

Nach Ablauf einer bestimmten Anzahl von Würfen hat sich die Anfangsanzahl halbiert. Da in der Kernphysik die Würfe mit der Zeit gleichgesetzt wird, sprechen wir auch hier von Halbwertszeit, auch wenn es sich bei den Würfeln genau genommen um eine Halbwertswurfnummer handelt.

Wenn die aktuelle Wurfnummer n der „Halbwertszeit" t_h entspricht, dann müssen nur noch halb so viele Würfel da sein, wie zu Anfang:

$$\frac{A_n}{A_0}=\frac{1}{2} \qquad \text{für} \qquad n=t_h \text{ oder } \frac{n}{t_h}=1 .$$

Wenn die aktuelle Wurfnummer n der zweifachen „Halbwertszeit" t_h entspricht, dann müssen nur noch die Hälfte von der Hälfte Würfel da sein:

$$\frac{A_n}{A_0}=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad \text{für} \qquad n=2\cdot t_h \text{ oder } \frac{n}{t_h}=2 .$$

Wenn die aktuelle Wurfnummer n der dreifachen „Halbwertszeit" t_h entspricht, dann müssen können nur noch die Hälfte von einem Viertel der anfangs vorhandenen Würfel da sein:

$$\frac{A_n}{A_0}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \text{für} \qquad n=3\cdot t_h \text{ oder } \frac{n}{t_h}=3 .$$

Im Allgemein gilt also (ohne streng mathematischen Beweis):

$$\frac{A_n}{A_0}=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_h}} \qquad \text{für} \qquad n=x\cdot t_h \text{ oder } \frac{n}{t_h}=x .$$

Entsprechend kann man bei bekannter „Halbwertzeit" t_h die Anzahl der übrig gebliebenen Würfel durch die Exponentialfunktion

$$\boxed{A_n=A_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_h}}}$$

berechnen.

Wenn alle Überlegungen richtig sind, dann müssen die beiden Ausdrücke

$$A_n=A_0\cdot(1-Z_w)^n \text{ und } A_n=A_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_h}}$$

gleich sein. Also kann man schreiben:

$$A_0\cdot(1-Z_w)^n=A_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{t_h}} .$$

Die anfänglich vorhandene Anzahl A_0 kürzt sich heraus:

$$(1-Z_w)^n=0{,}5^{\frac{n}{t_h}} .$$

Da diese Gleichung für alle n gilt, muss sie zwangsläufig auch für $n=1$ gelten:

$$(1-Z_w)=0{,}5^{\frac{1}{t_h}} \cdot$$

Das Problem ist, dass man die Halbwertszeit t_h berechnen möchte, die aber im Exponenten steht. Aber hier hilft der Logarithmus weiter (siehe auch Tafelwerk):

$$\frac{1}{t_h}=\log_{0,5}(1-Z_w) \; .$$

Um den Logarithmus zur Basis 0,5 mit dem Taschenrechner ausrechnen zu können, ist es sinnvoll einen Basiswechsel beispielsweise zum Zehnerlogarithmus lg durchzuführen:

$$\frac{1}{t_h}=\frac{lg(1-Z_w)}{lg\,0{,}5} \; .$$

Damit berechnet sich die Halbwertszeit aus

$$\boxed{t_h=\frac{lg\,0{,}5}{lg(1-Z_w)}} \, .$$

Umgekehrt kann man aus der Halbwertzeit auch die Zerfallswahrscheinlichkeit in Einheiten der Halbwertszeit bestimmen:

$$\boxed{Z_w=1-0{,}5^{1/t_h}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{Z_w=1-\sqrt[t_h]{0{,}5}}$$

Ferner sieht man durch diese Überlegungen auch, dass die Halbwertszeit nicht von der anfänglichen Anzahl A_0 abhängt.

Beispiel:

Die Halbwertszeit beträgt für eine Zerfallswahrscheinlichkeit von $Z_w=1/6$ *(ein Kern zerfällt mit einer Wahrscheinlichkeit von* $Z_w=1/6$ *in der Sekunde),*

$$t_h \approx 3{,}802\,s \; .$$

Das bedeutet, dass nach etwa 3,8 Sekunden, die Hälfte der vorhandenen Kerne (Würfel) zerfallen sind.

Andererseits findet man für Thorium 226 eine Halbwertszeit von 31 Minuten. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Thorium-226-Kern innerhalb der nächsten Minute zerfällt:

$$Z_w \approx 0{,}022 \; .$$